| | |
|---|---|
| **Thema** | Ganzrationale Funktionen |
| **Voraussetzungen** | Lösen von Gleichungen |
| **Besonderheiten** | keine |

| Aufgabe & Lösung | Erläuterungen |
|---|---|
| Diskutiere die Funktion<br>$f(x) = x^4 - x^3 - 25x^2 + 37x + 60$<br><br>**<u>1. Typ</u>**<br><br>Ganz-rationale Funktion vierten Grades mit gemischten Exponenten und Absolutglied. | Grundlagen zu den einzelnen Punkten findest du in Funktionen, Kap. 1.<br><br>Eine ganzrationale Funktion besteht nur aus x-Potenzen mit natürlichen Exponenten: $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_0$ , $n \in \mathbf{N}_0$<br>$f(x) = 3x^5 - \frac{7}{8}x$ ganz-rational<br>$f(x) = 9x - \frac{7}{x^2}$ gebrochen-rational |
| **<u>2. Definitionsmenge</u>**<br><br>Bei ganz-rationalen Funktionen gilt immer:<br><br>$\mathbf{D} = \mathbf{R}$ | Die Definitionsmenge beschreibt die Menge der zulässigen x-Werte. Bei einer ganzrationalen Funktion gibt es keine (mathematischen) Gründe, die Definitionsmenge einzuschränken: $\mathbf{D}=\mathbf{R}$<br><br>Einschränkungen kann es aus dem Aufgabentext heraus geben: Wenn z.B. die Variable x die Anzahl der verkauften Bananen beschreibt, so wäre $\mathbf{D}=\mathbf{N}_0$, da man<br>• keine „–3“ Bananen verkaufen kann.<br>• nicht unbedingt Bananen verkaufen muss (x=0).<br>• Bananen nur stückweise verkaufen darf. Das Lebensmittel- und Bedarfsgegenständegesetz verbietet den Verkauf von halben Bananen. |
| **<u>3. Symmetrie</u>**<br><br>Keine <u>einfache</u> Symmetrie, da gerade und ungerade Exponenten vorhanden.<br><br>Achtung: Dies bedeutet nicht, dass die Funktion überhaupt keine Symmetrie aufweist, sie kann auch eine verschobene Symmetrie besitzen! | • <u>Achsensymmetrie</u> zur y-Achse:<br>- allgemein: $f(x) = f(-x)$<br>- ganz-rat.: nur gerade Exponenten<br><br>• <u>Punktsymmetrie</u> zum Ursprung:<br>- allgemein: $f(x) = -f(-x)$<br>- ganz-rat.: nur ungerade Exponenten<br><br>• Eine Mischung von geraden und ungeraden Exponenten bedeutet, dass keine einfache Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse vorliegt. |

**4. Nullstellen:** f(x) = 0

$$x^4 - x^3 - 25x^2 + 37x + 60 = 0$$

... Gezieltes Raten mit Polynomdivision ...

$x_1 = -5$ $x_2 = -1$ $x_3 = 3$ $x_4 = 4$

$N_1(-5\,|\,0)$ $N_2(-1\,|\,0)$ $N_3(3\,|\,0)$ $N_4(4\,|\,0)$

Die Nullstellen einer Funktion stellen die gemeinsamen Punkte von Funktionsgraf und x-Achse dar. Man berechnet die Nullstellen, indem man den Funktionsterm gleich Null setzt und diese Gleichung (wie auch immer) nach x auflöst.

→ Grundlagen, Gleichungen

**5. Schnitt mit der y-Achse:** x=0

$$f(0) = 0^4 - 0^3 - 25 \cdot 0^2 + 37 \cdot 0 + 60$$
$$f(0) = 60$$
$$\Rightarrow S_y(0\,|\,60)$$

Alle Punkte auf der y-Achse haben die x-Koordinate Null. Deshalb erhält man den Schnittpunkt eines Funktionsgrafen mit der y-Achse, indem man für x eine null in den Funktionsterm einsetzt: Sy( 0 | f(0) )

Bei einer ganzrationalen Funktion wird f(0) auch als **Absolutglied** bezeichnet.

**6. Verhalten am Rande des Definitionsbereiches**

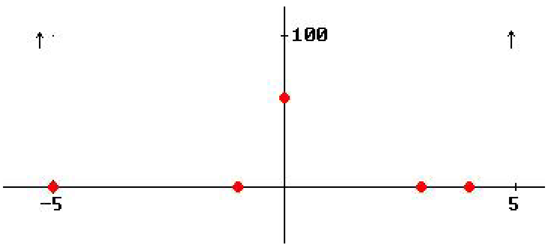
Gerader Grad ($x^4$) mit positivem Leitkoeffizienten (**+1**$x^4$):

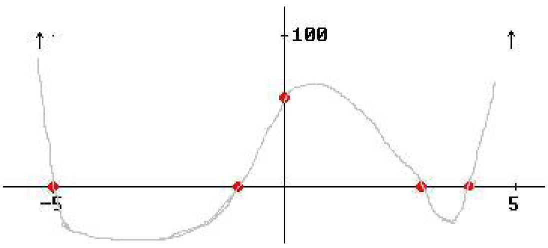
$$x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to +\infty$$
$$x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to +\infty$$

Entscheidend für das Verhalten im Unendlichen ist der Term mit der höchsten Potenz.
Beachte das Vorzeichen dieses Terms: ein negatives Vorzeichen kehrt das Verhalten um!

→ Funktionen, Kap. 1.3.12.

**7. Prognose**




Man markiert zuerst die oben berechneten charakteristischen Punkte des Grafen im Koordinatensystem.

Dann verbindet man die Punkte –unter Berücksichtigung des Verhaltens am Rande des Definitionsbereiches- durch einen geeigneten Grafen.

Tipp: Spitzen vermeiden, Rundungen benutzen!

Weitere Erkenntnisse:

- Zwischen den Nullstellen –5 und –1 gibt es ein Minimum.
- Um x=0 herum existiert ein (lokales) Maximum.
- Zwischen den Nullstellen 3 und 4 existiert ein Minimum.

## 8. Ableitungen

$f(x) = x^4 - x^3 - 25x^2 + 37x + 60$

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 50x + 37$

$f''(x) = 12x^2 - 6x - 50$

$f'''(x) = 24x - 6$

Zum Ableiten von ganz-rationalen Funktionen benötigt man die Konstanten- und die Summenregel:

$f(x) = c \cdot x^n \qquad f'(x) = c \cdot n \cdot x^{n-1}$

$f(x) = g(x) + h(x) \qquad f'(x) = g'(x) + h'(x)$

## 9. Extrema

$f'(x) = 0$

$\Rightarrow 4x^3 - 3x^2 - 50x + 37 = 0$

... numerische Näherungsverfahren ...

$x_{E1} \approx -3{,}53 \quad x_{E2} \approx 0{,}74 \quad x_{E3} \approx 3{,}54$

Für Extrema gilt:

$f'(x_E) = 0 \;\wedge\; f''(x_E) \begin{matrix} < 0 \Rightarrow \text{Max.} \\ > 0 \Rightarrow \text{Min.} \end{matrix}$

Nähere Untersuchung ...

... für $x_{E1} \approx -3{,}53$:

$f''(-3{,}53) \approx 121 > 0 \Rightarrow$ Min.
$f(-3{,}53) \approx -182{,}87$
$\Rightarrow \text{Min}_1(-3{,}53 \mid -182{,}87)$

... für $x_{E2} \approx 0{,}74$:

$f''(0{,}74) \approx -48 < 0 \Rightarrow$ Max.
$f(0{,}74) \approx 73{,}58$
$\Rightarrow \text{Max}(0{,}74 \mid 73{,}58)$

... für $x_{E3} \approx 3{,}54$:

$f''(3{,}54) \approx 79 > 0 \Rightarrow$ Min.
$f(3{,}54) \approx -9{,}63$
$\Rightarrow \text{Min}_2(3{,}54 \mid -9{,}63)$

**Monotonie-Intervalle**

| | |
|---|---|
| $\left]-\infty\,;-3{,}53\right[$ | streng monoton fallend |
| $\left]-3{,}53\,;0{,}74\right[$ | streng monoton steigend |
| $\left]0{,}74\,;3{,}54\right[$ | streng monoton fallend |
| $\left]3{,}54\,;+\infty\right[$ | streng monoton steigend |

## 10. Wendepunkte

$f''(x) = 0$

$\Rightarrow 12x^2 - 6x - 50 = 0$

... quadr.Gleichung z.B. mit pq-Formel lösen ...

$x_{W1} \approx -1{,}81 \quad x_{W2} \approx 2{,}31$

Für Wendepunkte gilt:

$f''(x_W) = 0 \;\wedge\; f'''(x_W) \neq 0$

Nähere Untersuchung ...

... für $x_{W1} \approx -1{,}81$:

$f'''(-1{,}81) \approx -50 \neq 0 \Rightarrow$ WP
$f(-1{,}81) \approx -72{,}21$
$\Rightarrow WP_1(-1{,}81 \mid -72{,}21)$

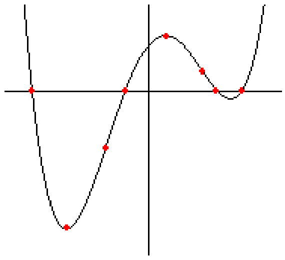
... für $x_{W2} \approx 2{,}31$:

$f'''(2{,}31) \approx 50 \neq 0 \Rightarrow$ WP
$f(2{,}31) \approx 28{,}22$
$\Rightarrow WP_2(2{,}31 \mid 28{,}22)$

## 11. Wertemenge

$\mathbf{W} = \{ y \in \mathbf{R} \mid y \geq -182{,}87 \} = \mathbf{R}^{\geq -182{,}87}$

Die Wertemenge ist die Menge aller Funktionswerte, die man erhält, wenn man die zulässigen x-Werte (= **D**) in die Funktion einsetzt.

| | |
|---|---|
| **12. Skizze**  | Deine Skizze kannst du mit dem kostenlosen Programm ***FunkyPlot*** kontollieren:<br><br>www.studienkreis.de<br><br>Oder alternativ mit dem ***Kurvenprofi***:<br><br>www.kurvenprofi.de |

**Übungen** Untersuche und skizziere die Funktionen.

1. $f(x) = x^2 + 18{,}2x + 82{,}81$
2. $y = -4{,}1x^2 + 29{,}52x + 83{,}6$
3. $f(x) = -6x^2 + x^3 + 3x + 10$
4. $y = -\frac{1}{3}x^3 + 0{,}3x^2 - 0{,}08x$
5. $y = x^3 - 5{,}4x^2 + 4{,}13x + 8{,}82$
6. $y = -3x^3 - 6x^2 - 21x$
7. $f(x) = 3{,}1x^3 - 49{,}6x$
8. $f(x) = -86{,}08x^2 + 2x^4$
9. $y = 4x^4 - 185x^2 + 1936$
10. $y = x^6 - 15x^4 + 63x^2 - 81$
11. $f(x) = 3{,}1x^5 - 9x^3$
12. $y = x^6 - 34x^4 + 225x^2$
13. $y = -x^7 - 4x^5 + 45x^3$
14. $f(x) = \frac{41x}{25} + \frac{x^3}{2}$
15. $f(x) = x^6 + 4x^3 - 45$

**Hilfen, Tipps, Hinweise**

Keine.

**Lösungen** **Teilweise noch in Arbeit.**

| | Nullstellen | $S_y$ | Sym. | $x \to -\infty$ | $x \to +\infty$ | Extrema | Wendep. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | -9,1 | 82,81 | -- | $y \to +\infty$ | $y \to +\infty$ | | |
| 2. | -2,17<br>9,37 | 83,6 | -- | $y \to -\infty$ | $y \to -\infty$ | | |
| 3. | -1<br>2<br>5 | 10 | -- | $y \to -\infty$ | $y \to +\infty$ | | |
| 4. | 0 | 0 | -- | $y \to +\infty$ | $y \to -\infty$ | | |
| 5. | -0,9<br>2,8<br>3,5 | 8,82 | -- | $y \to -\infty$ | $y \to +\infty$ | | |
| 6. | 0 | 0 | -- | $y \to +\infty$ | $y \to -\infty$ | | |
| 7. | 0<br>16 | 0 | PS | $y \to -\infty$ | $y \to +\infty$ | | |
| 8. | -6,59<br>0 (Max)<br>6,59 | 0 | AS | $y \to +\infty$ | $y \to +\infty$ | | |
| 9. | -5,5<br>-4<br>4<br>5,5 | 1936 | AS | $y \to +\infty$ | $y \to +\infty$ | | |
| 10. | -3<br>−1,73 (Max)<br>1,73 (Max)<br>3 | -81 | AS | $y \to +\infty$ | $y \to +\infty$ | | |
| 11. | -1,7<br>0<br>1,7 | 0 | PS | $y \to -\infty$ | $y \to +\infty$ | | |
| 12. | -5<br>-3<br>0 (Min)<br>3<br>5 | 0 | AS | $y \to +\infty$ | $y \to +\infty$ | | |
| 13. | -2,24<br>0 (TP)<br>2,24 | 0 | PS | $y \to +\infty$ | $y \to -\infty$ | | |
| 14. | 0 | 0 | PS | $y \to -\infty$ | $y \to +\infty$ | | |
| 15. | -2,08<br>1,71 | -45 | -- | $y \to +\infty$ | $y \to +\infty$ | | |